

## KONKURS MATEMATYCZNY „STOŻEK” 2008/2009

1. Na rozwiązanie 10 zadań masz 90 minut.
2. Dokładnie czytaj treści zadań i udzielaj odpowiedzi.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj swój tok rozumowania.
4. Rozwiązania zapisuj długopisem, jedynie do wykonywania rysunków możesz używać ołówka.
5. Nie używaj korektora ani kolorowych pisaków.
6. W razie pomyłki skreśl wybrany fragment.
7. Nie korzystaj z kalkulatora.

*POWODZENIA ŻYCZY KOMISJA KONKURSU MATEMATYCZNEGO  
„STOŻEK”*

## ZADANIA

### Zadanie 1

Zegarek spóźnia się  $x$  sekund w ciągu każdych  $y$  godzin,  $x < 60$ ,  $y \geq 1$ . Dziś o ósmej rano wskazywał dokładny czas. Ile minut wyniesie spóźnienie zegarka po upływie 2 tygodni?

### Zadanie 2

Ile boków ma wielokąt foremny, którego każdy z kątów wewnętrznych ma miarę  $162^{\circ}$ ?

### Zadanie 3

Starszy brat idzie z domu do szkoły 30 minut, a młodszy 40 minut. Po ilu minutach starszy brat dogoni młodszego brata, który wyruszył do szkoły 5 minut wcześniej?

### Zadanie 4

Co ile minut długa wskazówka zegara dogania krótką.

### Zadanie 5

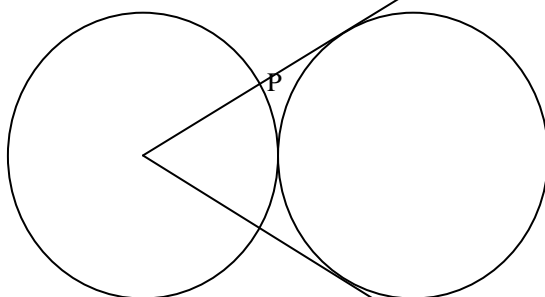
Jaka jest reszta dzielenia liczby  $3^{2008}$  przez 5?

### Zadanie 6

Rozszyfruj działanie  $4 * KLMNP4 = 4KLMNP$ .

### Zadanie 7

Dwa okręgi o promieniach 10cm są styczne zewnętrznie. Ze środka lewego okręgu poprowadzono styczną do prawego okręgu. Jakie jest pole obszaru oznaczonego na rysunku literką P?



### Zadanie 8

Stopiono dwa różne stopy cyny i ołowiu. Otrzymano 12 kg stopu, zawierającego 37,5% cyny. Ile kilogramów ważył pierwszy stop, jeżeli stosunek wagowy cyny do ołowiu w pierwszym stopie wynosił 2:3, a w drugim 3:7.

### Zadanie 9

Wykaż, że różnica czwartych potęg dwóch liczb całkowitych różniących się o 2 jest podzielna przez 8.

### Zadanie 10

W trójkącie prostokątnym punkt styczności okręgu wpisanego dzieli jedną z przyprostokątnych na odcinki 5 cm i 7 cm. Znaleźć długości drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej tego trójkąta.

## ROZWIĄZANIA (propozycja punktacji)

Zadanie 1.

W ciągu jednej godziny zegarek spóźnia się o  $\frac{x}{y}$  sekund – 2pkt

w ciągu 2-ch tygodni spóźnienie wyniesie  $336\frac{x}{y}$  sekund – 2 pkt

czyli  $\frac{336x}{60y} = \frac{28}{5} \cdot \frac{x}{y}$  minut – 1 pkt

---

Zadanie 2.

Analiza zadania (np. rysunek) – 1pkt

Obliczenie miary kąta między ramionami trójkąta równoramiennego, z jakich składa się wielokąt  $180^0 - 162^0 = 18^0$   
 $360^0 : 18^0 = 20$  – ilość boków wielokąta – 3 pkt

Poprawna odpowiedź – 1 pkt

---

Zadanie 3.

Analiza zadania (np. rysunek) – 1 pkt

$s$  – odległość z domu braci do szkoły

Ułożenie równania i prawidłowe rozwiązanie

$\frac{s}{30} \cdot x = \frac{s}{8} + \frac{s}{40} \cdot x;$   
– 3 pkt

$x = 15$

Poprawna odpowiedź – 1 pkt

---

Zadanie 4.

Analiza zadania (np. rysunek) – 1 pkt

Minutowa wskazówka w ciągu godziny zakreśla kąt  $360^0$ , czyli w ciągu 1 min. –  $6^0$

Godzinowa wskazówka w ciągu godziny zakreśla kąt  $30^0$ , czyli w ciągu 1 min. –  $0,5^0$

Obie wskazówki pokryją się, gdy różnica kątów wyniesie  $360^0$  – 1 pkt

Rozwiązując równanie  $6t - 0,5t = 360^0$ ;  $t$  - szukany czas – 1 pkt

Otrzymujemy  $t = 65\frac{5}{11} \approx 65$  minut – 1 pkt

Poprawna odpowiedź – 1 pkt

---

Zadanie 5.

$$3^1=3$$

$$3^2=9$$

$$3^3=27$$

$$3^4=81$$

$$3^5=\dots 3$$

Ostatnia cyfra potęgowania 3 to kolejno: 3, 9, 7, 1, 3,...itd.

- 2 pkt

$2008:4=502$  reszty 0,

- 1 pkt

czyli ostatnia cyfra tej liczby to 1,

- 1 pkt

toteż reszta z dzielenia przez 5 wynosi 1

- 1 pkt

---

Zadanie 6

Zadanie rozwiązujemy stosując zapis pisemny mnożenia

1 pkt

$4 * KLMNP4 = 4KLMNP$ , z którego wynika

$P=6$ , bo  $4*4=16$  i 1 przechodzi dalej

toteż  $N=5$ , bo  $4*6=24$   $4+1=5$  i 2 przechodzi dalej

W analogiczny sposób wyznaczamy kolejne literki

Ostatecznie:  $K=1$ ,  $L=0$ ,  $M=2$ ,  $N=5$ ,  $P=6$

Wyznaczenie poprawne wszystkich liter

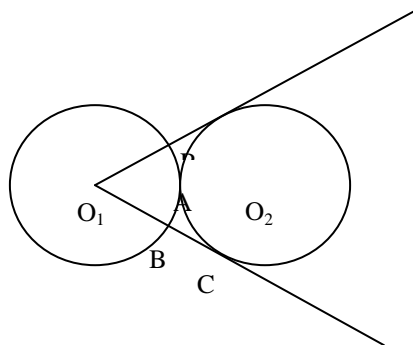
4 pkt

Jeżeli sposób myślenia jest poprawny, tylko występują błędy obliczeniowe 3 pkt

---

Zadanie 7

Analiza - 1 pkt



$$|O_1O_2| = 20$$

$$|O_2C| = 10 \quad \text{stąd wycinki } AO_1B \text{ i } AO_2C \text{ stanowią } \frac{1}{12} \text{ i } \frac{1}{6} \text{ kół odpowiednio. - 2pkt}$$

$$|\angle O_1O_2C| = 60^\circ$$

Zatem pole zacieniowanego obszaru wynosi:

$$P = P_{O_1O_2C} - P_{AO_1B} - P_{AO_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12} \pi \cdot 10^2 - \frac{1}{6} \pi \cdot 10^2 =$$

$$= 50\sqrt{3} - 25\pi = 25(2\sqrt{3} - \pi)$$

Poprawna odpowiedź i obliczenia

pkt

- 2

---

Zadanie 8

$x$  – waga I stopu,  $y$  – waga II stopu  
 $2:5=0,4=40\%$  - zawartość cyny w I stopie  
 $3:10=0,3=30\%$  - zawartość cyny w II stopie

– 1 pkt

$x+y=12$   
 $0,4x+0,3y=0,375*12$       ułożenie równań

– 2 pkt

Rozwiązanie układu równań i podanie poprawnej odpowiedzi  $x=9\text{kg}$ ,  $y=3\text{kg}$   
– 2 pkt

---

Zadanie 9

Założenie:  $n \in \mathbb{C}$  – całkowitych  
Teza:  $n^4 - (n-2)^4$  dzieli się przez 8

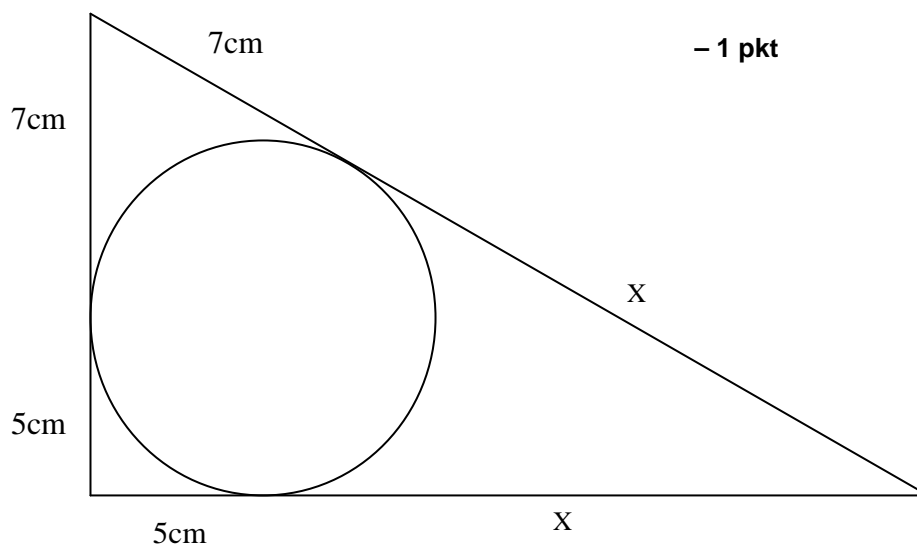
– 2 pkt

Po obliczeniach otrzymujemy  $8(n-2)(n^2-2n+2)$ , czyli liczba ta jest podzielna przez 8 – 3 pkt

---

Zadanie 10

Odpowiedni rysunek  
12cm – I przyprostokątna  
 $5+x$  - II przyprostokątna  
 $7+x$  - przeciwprostokątna



– 1 pkt

Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa:  $12^2+(5+x)^2=(7+x)^2$

- 2 pkt

Obliczenie  $x=30$

– 1 pkt

Podanie długości boków trójkąta 12cm, 35cm, 37cm

– 1 pkt

**Prawidłowo zrobione zadanie punkujemy maksymalnie (5 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.**