

KONKURS MATEMATYCZNY „STOŻEK” 2008/2009

1. Na rozwiązanie 10 zadań masz 90 minut.
2. Dokładnie czytaj treści zadań i udzielaj odpowiedzi.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj swój tok rozumowania.
4. Rozwiązania zapisuj długopisem, jedynie do wykonywania rysunków możesz używać ołówka.
5. Nie używaj korektora ani kolorowych pisaków.
6. W razie pomyłki skreśl wybrany fragment.
7. Nie korzystaj z kalkulatora.

*POWODZENIA ŻYCZY KOMISJA KONKURSU MATEMATYCZNEGO
„STOŻEK”*

ZADANIA

Zadanie 1

Zegarek spóźnia się x sekund w ciągu każdych y godzin, $x < 60$, $y \geq 1$. Dziś o ósmej rano wskazywał dokładny czas. Ile minut wyniesie spóźnienie zegarka po upływie 2 tygodni?

Zadanie 2

Ile boków ma wielokąt foremny, którego każdy z kątów wewnętrznych ma miarę 162° ?

Zadanie 3

Starszy brat idzie z domu do szkoły 30 minut, a młodszy 40 minut. Po ilu minutach starszy brat dogoni młodszego brata, który wyruszył do szkoły 5 minut wcześniej?

Zadanie 4

Co ile minut długa wskazówka zegara dogania krótką.

Zadanie 5

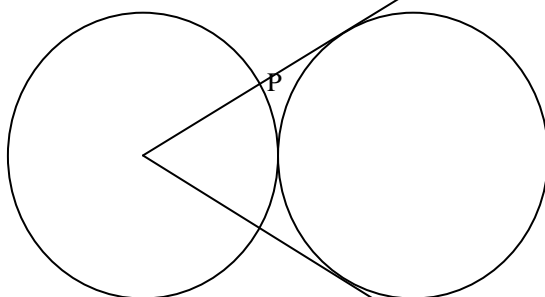
Jaka jest reszta dzielenia liczby 3^{2008} przez 5?

Zadanie 6

Rozszyfruj działanie $4 * KLMNP4 = 4KLMNP$.

Zadanie 7

Dwa okręgi o promieniach 10cm są styczne zewnętrznie. Ze środka lewego okręgu poprowadzono styczną do prawego okręgu. Jakie jest pole obszaru oznaczonego na rysunku literką P?



Zadanie 8

Stopiono dwa różne stopy cyny i ołowiu. Otrzymano 12 kg stopu, zawierającego 37,5% cyny. Ile kilogramów ważył pierwszy stop, jeżeli stosunek wagowy cyny do ołowiu w pierwszym stopie wynosił 2:3, a w drugim 3:7.

Zadanie 9

Wykaż, że różnica czwartych potęg dwóch liczb całkowitych różniących się o 2 jest podzielna przez 8.

Zadanie 10

W trójkącie prostokątnym punkt styczności okręgu wpisanego dzieli jedną z przyprostokątnych na odcinki 5 cm i 7 cm. Znaleźć długości drugiej przyprostokątnej i przeciwprostokątnej tego trójkąta.

ROZWIĄZANIA (propozycja punktacji)

Zadanie 1.

W ciągu jednej godziny zegarek spóźnia się o $\frac{x}{y}$ sekund – 2pkt

w ciągu 2-ch tygodni spóźnienie wyniesie $336\frac{x}{y}$ sekund – 2 pkt

czyli $\frac{336x}{60y} = \frac{28}{5} \cdot \frac{x}{y}$ minut – 1 pkt

Zadanie 2.

Analiza zadania (np. rysunek) – 1pkt

Obliczenie miary kąta między ramionami trójkąta równoramiennego, z jakich składa się wielokąt $180^0 - 162^0 = 18^0$
 $360^0 : 18^0 = 20$ – ilość boków wielokąta – 3 pkt

Poprawna odpowiedź – 1 pkt

Zadanie 3.

Analiza zadania (np. rysunek) – 1 pkt

s – odległość z domu braci do szkoły

Ułożenie równania i prawidłowe rozwiązanie

$\frac{s}{30} \cdot x = \frac{s}{8} + \frac{s}{40} \cdot x;$
– 3 pkt

$x = 15$

Poprawna odpowiedź – 1 pkt

Zadanie 4.

Analiza zadania (np. rysunek) – 1 pkt

Minutowa wskazówka w ciągu godziny zakreśla kąt 360^0 , czyli w ciągu 1 min. – 6^0

Godzinowa wskazówka w ciągu godziny zakreśla kąt 30^0 , czyli w ciągu 1 min. – $0,5^0$

Obie wskazówki pokryją się, gdy różnica kątów wyniesie 360^0 – 1 pkt

Rozwiązując równanie $6t - 0,5t = 360^0$; t - szukany czas – 1 pkt

Otrzymujemy $t = 65\frac{5}{11} \approx 65$ minut – 1 pkt

Poprawna odpowiedź – 1 pkt

Zadanie 5.

$$3^1=3$$

$$3^2=9$$

$$3^3=27$$

$$3^4=81$$

$$3^5=\dots 3$$

Ostatnia cyfra potęgowania 3 to kolejno: 3, 9, 7, 1, 3,...itd.

- 2 pkt

$2008:4=502$ reszty 0,

- 1 pkt

czyli ostatnia cyfra tej liczby to 1,

- 1 pkt

toteż reszta z dzielenia przez 5 wynosi 1

- 1 pkt

Zadanie 6

Zadanie rozwiązujemy stosując zapis pisemny mnożenia

1 pkt

$4 * KLMNP4 = 4KLMNP$, z którego wynika

$P=6$, bo $4*4=16$ i 1 przechodzi dalej

toteż $N=5$, bo $4*6=24$ $4+1=5$ i 2 przechodzi dalej

W analogiczny sposób wyznaczamy kolejne literki

Ostatecznie: $K=1$, $L=0$, $M=2$, $N=5$, $P=6$

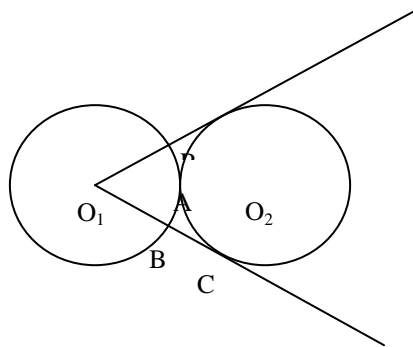
Wyznaczenie poprawne wszystkich liter

4 pkt

Jeżeli sposób myślenia jest poprawny, tylko występują błędy obliczeniowe 3 pkt

Zadanie 7

Analiza - 1 pkt



$$|O_1O_2| = 20$$

$$|O_2C| = 10 \quad \text{stąd wycinki } AO_1B \text{ i } AO_2C \text{ stanowią } \frac{1}{12} \text{ i } \frac{1}{6} \text{ kół odpowiednio. - 2pkt}$$

$$|\angle O_1O_2C| = 60^\circ$$

Zatem pole zacieniowanego obszaru wynosi:

$$P = P_{O_1O_2C} - P_{AO_1B} - P_{AO_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12} \pi \cdot 10^2 - \frac{1}{6} \pi \cdot 10^2 =$$

$$= 50\sqrt{3} - 25\pi = 25(2\sqrt{3} - \pi)$$

Poprawna odpowiedź i obliczenia

pkt

- 2

Zadanie 8

x – waga I stopu, y – waga II stopu
 $2:5=0,4=40\%$ - zawartość cyny w I stopie
 $3:10=0,3=30\%$ - zawartość cyny w II stopie

– 1 pkt

$x+y=12$
 $0,4x+0,3y=0,375*12$ ułożenie równań

– 2 pkt

Rozwiązanie układu równań i podanie poprawnej odpowiedzi $x=9\text{kg}$, $y=3\text{kg}$
– 2 pkt

Zadanie 9

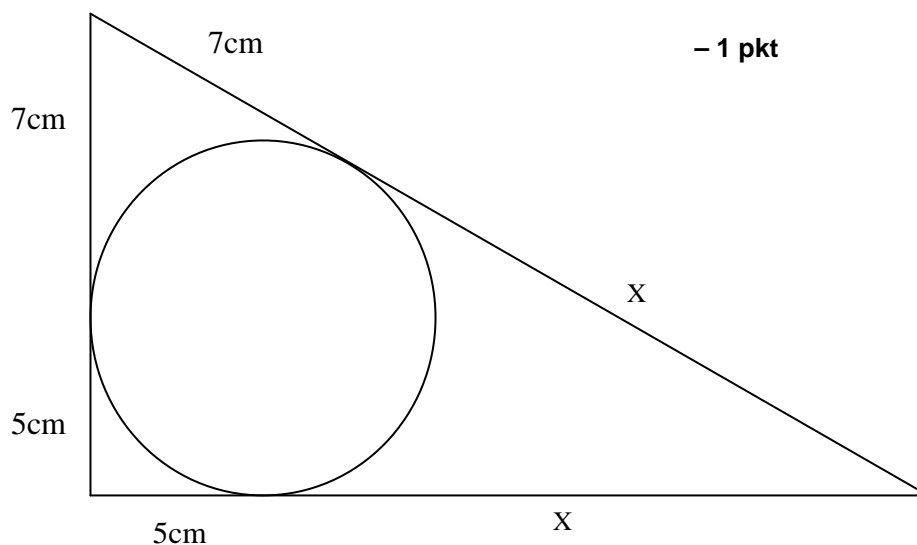
Założenie: $n \in \mathbb{C}$ – całkowitych
Teza: $n^4 - (n-2)^4$ dzieli się przez 8

– 2 pkt

Po obliczeniach otrzymujemy $8(n-2)(n^2-2n+2)$, czyli liczba ta jest podzielna przez 8 – 3 pkt

Zadanie 10

Odpowiedni rysunek
12cm – I przyprostokątna
 $5+x$ - II przyprostokątna
 $7+x$ - przeciwprostokątna



– 1 pkt

Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa: $12^2+(5+x)^2=(7+x)^2$

- 2 pkt

Obliczenie $x=30$

– 1 pkt

Podanie długości boków trójkąta 12cm, 35cm, 37cm

– 1 pkt

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (5 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.