

KONKURS MATEMATYCZNY „STOŻEK” 2007/2008

1. Na rozwiązanie 10 zadań masz 90 minut.
2. Dokładnie czytaj treści zadań i udzielaj odpowiedzi.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj swój tok rozumowania.
4. Rozwiązania zapisuj długopisem, jedynie do wykonywania rysunków możesz używać ołówka.
5. Nie używaj korektora ani kolorowych pisaków.
6. W razie pomyłki skreśl wybrany fragment.
7. Nie korzystaj z kalkulatora.

*POWODZENIA ŻYCZY KOMISJA KONKURSU MATEMATYCZNEGO
„STOŻEK”*

ZADANIA

Zadanie 1

Różnica kwadratów dwóch liczb naturalnych wynosi 28. Jakie to liczby?

Zadanie 2

Przez jaki czas w ciągu doby na wyświetlaczu zegarka elektronicznego widoczna jest jedna cyfra 9? Zegarek wyświetla godziny i minuty, nie pokazuje sekund.

Zadanie 3

Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, panowałby $\frac{1}{4}$ swego życia, gdyby zaś żył o 9 lat dłużej, panowałby połowę swego życia. Ile lat żył i ile lat panował?

Zadanie 4

Marek kupił 10 bułek, a Witek 6. Podzielili je na 3 równe części i wraz z Krzysiem zjedli. Następnie Krzys oddał kolegom w sumie 80 gr. za zjedzone bułki. Ile pieniędzy otrzymał Witek?

Zadanie 5

W okręgu o środku w punkcie O przeprowadzono średnicę AB i dwie cięciwy AE i BF przecinające się w punkcie K i takie, że $|AE| = |BF|$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC, jeżeli C jest punktem, w którym przecinają się proste AF i BE, kąt $|\angle AKB| = 124^\circ$.

Zadanie 6

W kwadracie o boku a ścięto naroża tak, że powstał ośmiokąt o równych bokach. Oblicz pole tego ośmiokąta.

Zadanie 7

W czasie 3 godzin samolot przeleciał z wiatrem drogę o długości 1134 km. Lecąc pod wiatr z taką samą prędkością przeleciał w czasie 1 godziny 342 km. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka wiatru?

Zadanie 8

Trzy gracje niosą jabłka, każda ma jednakową ich ilość. Spotykają dziewięć muz, na ich prośbę obdarzają każdą muzę jednakową ilością jabłek. Po podziale każda gracja i każda muza miała taką samą ilość jabłek. Ile jabłek miała każda z gracji przed podziałem?

Zadanie 9

Trzcina bambusowa, mająca 32 łokcie i wznosząca się pionowo na równinie, została w jednym miejscu złamana przez wiatr. Wierzchołek jej dotknął ziemi o 16 łokci od podstawy. Ile łokci nad ziemią została złamana trzcina bambusowa?

Zadanie 10

W ciągu dwóch lat wiek czterech członków pewnej rodziny wzrósł odpowiednio o 4%, 5%, 10% i 20%. O ile procent wzrosła średnia wieku tych czterech osób?

ROZWIĄZANIA (propozycja punktacji)

Zadanie 1.

Niech szukanymi liczbami będą n i k i niech $n > k$ ($n \neq k$, ponieważ gdyby $n = k$ wtedy byłoby $n^2 - k^2 = 0$ wbrew założeniu). Mamy $n^2 - k^2 = (n + k)(n - k) = 28$ i $n - k < n + k$.
Ponieważ $28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$ (**1 pkt**) więc mogą zachodzić warunki:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} n - k = 1 \\ n + k = 28 \end{array} \right. & \text{lub} & \left\{ \begin{array}{l} n - k = 4 \\ n + k = 7 \end{array} \right. & \text{lub} & \left\{ \begin{array}{l} n - k = 2 \\ n + k = 14 \end{array} \right. \\ 2n = 29 & & 2n = 11 & & 2n = 16 & \text{(podanie poprawnych układów} \\ n = 14\frac{1}{2} \notin N & & n = 5\frac{1}{2} \notin N & & \left\{ \begin{array}{l} n = 8 \\ k = 6 \end{array} \right. \end{array}$$

równań 2pkt

Z pierwszych dwóch warunków wynika sprzeczność (n musi być liczbą naturalną) zatem liczbami spełniającymi warunki zadania są 8 i 6. Spr. $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$. – (**poprawne rozwiązanie układów równań i podanie odpowiedzi**) **2pkt**

Zadanie 2.

Cyfra 9 występuje w godzinie 9-tej i 19-tej, a także pojawia się w następujących minutach: 09, 19, 29, 39, 49, 59. – **1pkt**

60min.-6min.=54min. –w liczbie godzin jest dziewiątka (przez 6 min. są dwie dziewiątki)

22min.*6min.=132min – w liczbie godzin nie ma dziewiątki

2*54+132=240min. – **3pkt**

Odp. W ciągu doby jedna dziewiątka pojawia się na wyświetlaczu przez 240min. – **1pkt**

Zadanie 3.

x - lata życia Aleksandra Wielkiego

y - lata panowania Aleksandra Wielkiego

$$\left\{ \begin{array}{l} y - 5 = \frac{1}{4}(x - 5) \\ y + 9 = \frac{1}{2}(x + 9) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 33 \\ y = 12 \end{array} \right. \text{ 3pkt (podanie danych i układ równań)}$$

Odp. Aleksander Wielki żył 33 lata, a panował 12 lat. (**poprawne rozwiązanie układu i odpowiedź**) **2 pkt**

Zadanie 4.

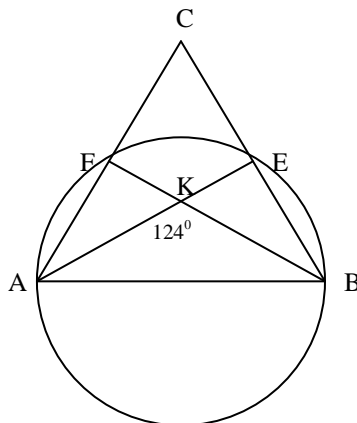
Każdy z chłopców zjadł $5\frac{1}{3}$ bułki (zakładamy, że był wymóg i zjedli po równo $16 : 3 = 5\frac{1}{3}$).

– **1 pkt**

Marek oddał więc Krzysiovi $4\frac{2}{3}$, a Witek $\frac{2}{3}$ bułki. Krzysz za zjedzenie $5\frac{1}{3}$ bułki zapłacił 80 gr., stąd 1 bułka kosztowała 80 gr. : $5\frac{1}{3} = 15$ gr. **2 pkt**

Witek dał Krzysiovi $\frac{2}{3}$ bułki więc powinien otrzymać $\frac{2}{3} \cdot 15$ gr. = 10 gr. – **2 pkt**

Zadanie 5



prawidłowy rysunek 1 pkt

Trójkąt AKB jest równoramienny bo trójkąty ABE i ABF są przystające. Obliczamy miarę kąta KBA :

$$\text{kąt } KBA = (180^\circ - 124^\circ) : 2 = 56^\circ : 2 = 28^\circ, - 1 \text{ pkt}$$

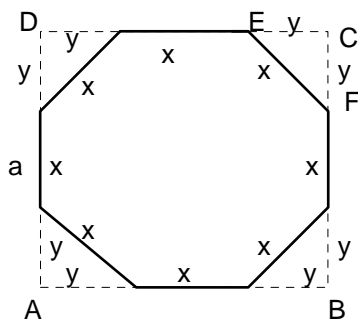
obliczamy miarę kąta CAB :

$$\text{kąt } CAB = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ, \text{ ponieważ kąt } CAB = \text{kąt } CBA \text{ więc kąt } CBA = 62^\circ \text{ i kąt } ACB = 180^\circ - 2 \cdot 62^\circ = 56^\circ. - 2 \text{ pkt}$$

Odp: Ostatecznie kąty trójkąta wynoszą: $56^\circ, 62^\circ, 62^\circ$. - 1 pkt

Zadanie 6.

rysunek 1 pkt



Ponieważ trójkąt FCE jest prostokątny, więc $x^2 = y^2 + y^2$, czyli $x^2 = 2 \cdot y^2$ i $x = \sqrt{2y^2} = \sqrt{2} \cdot y$. Ponieważ $x + y + y = a$ więc

$$\sqrt{2} \cdot y + 2y = a \Rightarrow y = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{4-2} = \frac{1}{2}a(2-\sqrt{2}) - 2 \text{ pkt}$$

Obliczamy pole ośmiokąta:

$$P = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}y^2 = a^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot (2-\sqrt{2})^2 =$$

$$a^2 - \frac{1}{2}a^2 \cdot (4 - 4\sqrt{2} + 2) = a^2 - a^2 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = - 2 \text{ pkt}$$

$$a^2 \cdot (1 - 3 + 2\sqrt{2}) = \underline{(2\sqrt{2} - 2) \cdot a^2}$$

Zadanie 7

V_s – prędkość samolotu

V_w – prędkość wiatru

$$\begin{cases} 1134 = 3(V_s + V_w) \\ 342 = V_s - V_w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_s = 320 \\ V_w = 18 \end{cases} \quad \text{- 3pkt (podanie danych i układ równań),}$$

(prawidłowe rozwiązanie układu równań) 1 pkt

Odp: Prędkość samolotu wynosi 320 km/h, a wiatru 18 km/h. – **1 pkt**

Zadanie 8

Wszystkie boginie, a było ich w sumie 12, miały po podziale jednakową ilość jabłek. Więc ogólna liczba jabłek musi być wielokrotnością liczby 12, z czego wynika, że każda z trzech graczy miała przed podziałem liczbę jabłek podzieloną przez 4. Wiemy również, że każda gracja obdarzyła dziewięć muz jednakową ilością jabłek, czyli ilość ta nie może być mniejsza od 9. Pierwszą wielokrotnością liczby 4 większą od 9 jest 12. Liczba ta więc będzie poszukiwaną, gdyż jeśli każda gracja da jedno jabłko każdej muzie, to każdej gracji pozostaną 3 jabłka i każda z muz otrzyma 3 jabłka. Rozwiązaniem zadania są więc wszystkie wielokrotności liczby 12.

W przypadku podania jednego rozwiązania (np. 12) – 3 pkt

Poprawna odpowiedź z uzasadnieniem - 5 pkt

Zadanie 9

Przypuśćmy, że trzcina została złamana na wysokości x łokci nad ziemią. Z trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych x i 16 oraz przeciwprostokątnej $32 - x$ mamy równanie algebraiczne $(32 - x)^2 = x^2 + 162$, którego rozwiązaniem jest liczba 20.

Analiza zadania (rysunek) – 1 pkt

Prawidłowe równanie – 2 pkt

Prawidłowe rozwiązanie równania – 1 pkt

Poprawna odpowiedź – 1 pkt

Zadanie 10

a, b, c, d – wiek członków rodziny

$$0,04a=2 \Leftrightarrow a=50$$

$$0,05b=2 \Leftrightarrow b=40$$

$$0,10c=2 \Leftrightarrow c=20$$

$$0,20d=2 \Leftrightarrow d=10$$

analiza – 2 pkt

$$\text{Średnia wieku na początku} - \frac{50 + 40 + 20 + 10}{4} = 30 \quad \text{- 1 pkt}$$

$$\text{Średnia wieku po dwóch latach} - \frac{52 + 42 + 22 + 12}{4} = 32 \quad \text{- 1 pkt}$$

$$\text{Procentowy wzrost średniej} - \frac{32 - 30}{30} 100\% = 6\frac{2}{3}\% \quad \text{- 1 pkt}$$

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (5 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.