

KONKURS MATEMATYCZNY „STOŻEK” 2007/2008

1. Na rozwiązanie 5 zadań masz 90 minut.
2. Dokładnie czytaj treści zadań i udzielaj odpowiedzi.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj swój tok rozumowania.
4. Rozwiązania zapisuj długopisem, jedynie do wykonywania rysunków możesz używać ołówka.
5. Nie używaj korektora ani kolorowych pisaków.
6. W razie pomyłki skreśl wybrany fragment.
7. Nie korzystaj z kalkulatora.
8. Kolejność rozwiązywania zadań dowolna.

*POWODZENIA ŻYCZY KOMISJA KONKURSU MATEMATYCZNEGO
„STOŻEK”*

ZADANIE 1

Pomiędzy dziesięcioro dzieci rozdano 95 cukierków. Każde następne dziecko dostało 1 cukierek więcej od poprzedniego. Ile najwięcej cukierków otrzymało pojedyncze dziecko?

ZADANIE 2

W okrąg o promieniu $r = 10$ wpisano prostokąt ABCD. Następnie na okręgu wybrano dowolny punkt E. Oblicz sumę kwadratów odległości punktu E od wierzchołków prostokąta.

ZADANIE 3

Funkcja przyporządkowuje liczbie x wierzchołków wielokąta liczbę jego przekątnych:

- a) określ dziedzinę i znajdź wartość tej funkcji dla czterech różnych argumentów,
- b) sporządź wykres funkcji dla argumentów mniejszych lub równych 7,
- c) oblicz wartość tej funkcji dla $x = 100$,
- d) napisz wzór tej funkcji.

ZADANIE 4

Wykaż, że jeżeli $n \in \mathbb{N}$ i n nie jest podzielne przez 3, to $n^2 + 2$ jest podzielne przez 3.

ZADANIE 5

Karton o pojemności 1 litra jest częściowo wypełniony sokiem. Gdy stoi na ścianie o najmniejszym polu, poziom soku sięga do wysokości 8 cm, gdy na średniej ścianie – 4 cm, a gdy na największej – 2 cm. Jaka jest objętość soku w kartonie?

ROZWIĄZANIA I PROPOZYCJA PUNKTACJI

Zadanie 1

Dziecko z najmniejszą liczą cukierków

Oznaczmy przez x dziecko z najmniejszą liczbą cukierków.

Liczba cukierków jakie otrzymały kolejne dzieci

Każde kolejne dziecko musiało otrzymać liczbę cukierków o 1 większą:

Pierwsze dziecko: x

Drugie dziecko: $x+1$

Trzecie dziecko: $x+2$

...

Dziesiąte dziecko: $x+9$

2pkt

Liczba cukierków jakie otrzymały wszystkie dzieci

$$x + x+1 + x+2 + \dots + x+9 = 10x + 1+2+ \dots + 9 = 10x + 1+9 + 2+8 + 3+7 + 4+6 + 5 = 10x + 4 \cdot 10 + 5 = 10x + 45$$

2pkt

Liczba cukierków jakie otrzymało dziecko z najmniejszą liczą cukierków

Ponieważ z treści zadania wynika, że wszystkie dzieci otrzymały 95 cukierków więc otrzymujemy równanie:

$$10x + 45 = 95$$

$$10x = 50$$

$$x = 5$$

3pkt

Największa liczba cukierków jakie otrzymało pojedyncze dziecko

Najwięcej cukierków otrzymało dziesiąte dziecko:

$$x + 9 = 5 + 9 = 14 \text{ (cukierków)}$$

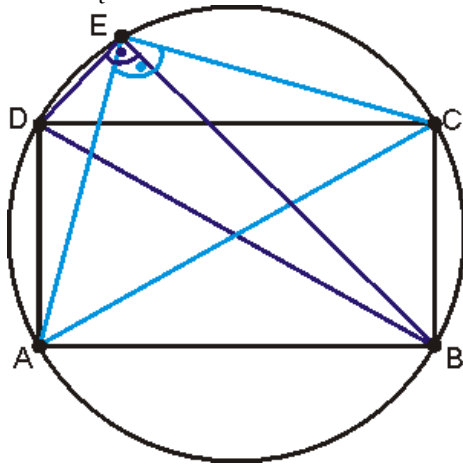
2pkt

Odpowiedź: Największa liczba cukierków jakie otrzymało pojedyncze dziecko to 14. **1pkt**

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.

Zadanie 2

Rozwiązanie zadania



prawidłowy rysunek 2pkt

Trójkąty prostokątne

Przekątne prostokąta, wraz z odcinkami łączącymi punkt E z wierzchołkami prostokąta tworzą trójkąty prostokątne. Trójkąt DBE jest trójkątem prostokątnym gdyż oparty jest na średnicy (DB). Podobnie prostokątny jest trójkąt ACE.

2 pkt

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ACE

$$|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$$

Podstawiając $|AC| = 10$ (średnica okręgu) do twierdzenia Pitagorasa:

$$|AE|^2 + |EC|^2 = 10^2$$

$$|AE|^2 + |EC|^2 = 100$$

2pkt

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego DBE

Podobnie z trójkąta prostokątnego DBE i twierdzenia Pitagorasa otrzymamy, że:

$$|DE|^2 + |EB|^2 = 100$$

2pkt

Szukana suma kwadratów odległości punktu E od wierzchołków prostokąta wynosi 200

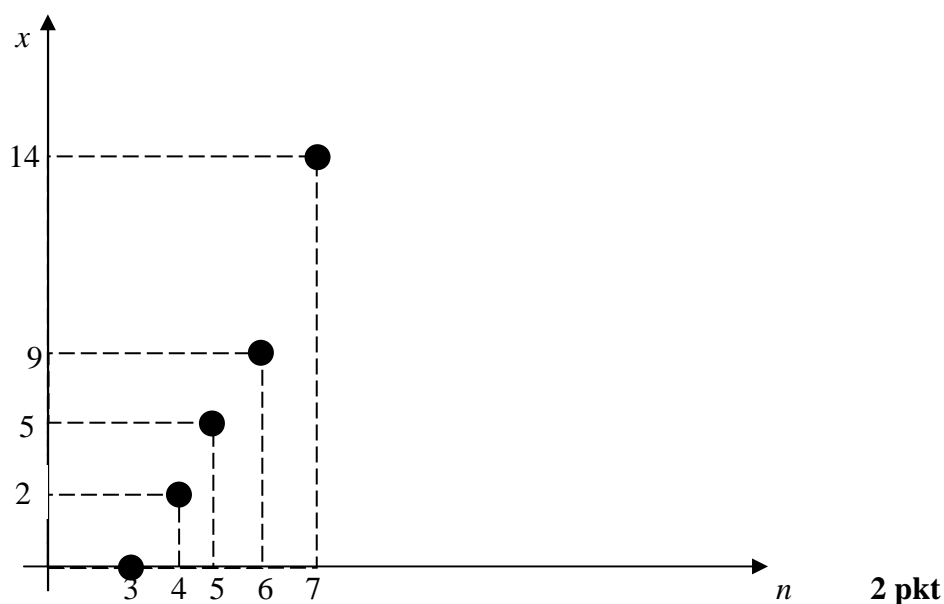
$$(|EA|^2 + |EB|^2 + |EC|^2 + |ED|^2 = 200) 2pkt$$

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.

Zadanie 3

$$x = \frac{n \cdot (n-3)}{2}, \text{ gdzie } x \text{ to ilość przekątnych w } n\text{-kącie}$$

- a) dziedziną tej funkcji są liczby naturalne większe lub równe od 3.
Przykłady 4 różnych wartości: tak jak np. w b), **3 pkt**
- b) jeżeli wielokąt ma 3 boki to jest to trójkąt i nie ma przekątnych dlatego $f(3)=0$, jeżeli wielokąt ma 4 boki to wówczas $f(4)=2$, jeżeli wielokąt ma 5 boków, wówczas $f(5)=5$, i tak dalej $f(6)=9$, $f(7)=14$



- c) $f(100) = \frac{100 \cdot (100-3)}{2} = 50 \cdot 97 = 4850$, sto-kąt ma 4850 przekątnych **2 pkt**
- d) $f(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ **3 pkt**

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.

Zadanie 4

Liczby naturalne n możemy podzielić ze względu na podzielność przez 3 na trzy grupy:

- 1) dzielące się przez 3: postaci $3k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
 - 2) dające resztę 1 przy dzieleniu przez 3: postaci $3k+1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
 - 3) dające resztę 2 przy dzieleniu przez 3: postaci $3k+2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
- Wszystkie liczby n niepodzielne przez 3 są postaci $3k+1$ lub $3k+2$.

2pkt

Sprawdzam, czy dla liczb n postaci $3k+1$ wyrażenie $n^2 + 2$ jest podzielne przez 3.

$$(3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 1 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 = 3 \cdot (3k^2 + 2k + 1) = 3s$$

gdzie $s = 3k^2 + 2k + 1$ i $s \in \mathbb{N}$.

Zatem dla $n = 3k+1$ wyrażenie $n^2 + 2$ jest podzielne przez 3.

3pkt

Sprawdzam, czy dla liczb n postaci $3k+2$ wyrażenie $n^2 + 2$ jest podzielne przez 3.

$$(3k+2)^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 4 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 2) = 3p$$

gdzie $p = 3k^2 + 4k + 2$ i $p \in \mathbb{N}$.

3pkt

Zatem dla wszystkich n niepodzielnych przez 3 ($n = 3k+1$ oraz $n = 3k+2$) wyrażenie $n^2 + 2$ jest podzielne przez 3, co należało dowieść (cnd).

2pkt

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.

Zadanie 5

x, y, z – wymiary kartonika, gdzie $x < y < z$

Obliczamy objętość na 3 sposoby:

1. $V = 8xy,$

2. $V = 4xz,$

3. $V = 2yz.$

3 pkt

$$V^3 = 64x^2y^2z^2 = 64(xyz)^2, \text{ stąd:}$$

$$xyz = 1000 \text{ cm}^3, \text{ czyli}$$

$$V^3 = 64 \cdot 1000^2, \text{ toteż}$$

$$V = 400 \text{ cm}^3.$$

6pkt

Odp.: W kartoniku jest 400 cm^3 soku.

1pkt

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.