KONKURS MATEMATYCZNY „STOŻEK” 2007/2008

1. Na rozwiązanie 5 zadań masz 90 minut.
2. Dokładnie czytaj treści zadań i udzielaj odpowiedzi.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj swój tok rozumowania.
4. Rozwiązania zapisuj długopisem, jedynie do wykonywania rysunków możesz używać ołówka.
5. Nie używaj korektora ani kolorowych pisaków.
6. W razie pomyłki skreśl wybrany fragment.
7. Nie korzystaj z kalkulatora.
8. Kolejność rozwiązywania zadań dowolna.

POWODZENIA ŻYCZY KOMISJA KONKURSU MATEMATYCZNEGO „STOŻEK”

ZADANIE 1
Pomiędzy dziesięcioro dzieci rozdano 95 cukierków. Każde następne dziecko dostało 1 cukierek więcej od poprzedniego. Ile najwięcej cukierków otrzymało pojedyncze dziecko?

ZADANIE 2
W okrąg o promieniu r = 10 wpisano prostokąt ABCD. Następnie na okręgu wybrano dowolny punkt E. Oblicz sumę kwadratów odległości punktu E od wierzchołków prostokąta.

ZADANIE 3
Funkcja przyporządkowuje liczbie x wierzchołków wielokąta liczbę
jego przekątnych:
a)określ dziedzinę i znajdź wartość tej funkcji dla czterech
różnych argumentów,
b)sporządź wykres funkcji dla argumentów mniejszych lub równych 7,
c)oblicz wartość tej funkcji dla x =100,
d)napisz wzór tej funkcji.

ZADANIE 4
Wykaż, że jeżeli $n \in N$ i n nie jest podzielne przez 3, to n^2+2 jest podzielne przez 3.

ZADANIE 5
Karton o pojemności 1litra jest częściowo wypełniony sokiem. Gdy stoi na ścianie o najmniejszym polu, poziom soku sięga do wysokości 8cm, gdy na średniej ścianie – 4cm, a gdy na największej – 2 cm. Jaka jest objętość soku w kartonie?

ROZWIĄZANIA I PROPOZYCJA PUNKTACJI

Zadanie 1

Dziecko z najmniejszą liczą cukierków

Oznaczmy przez x dziecko z najmniejszą liczbą cukierków.

Liczba cukierków jakie otrzymały kolejne dzieci

Każde kolejne dziecko musiało otrzymać liczbę cukierków o 1 większą:
Pierwsze dziecko: x
Drugie dziecko: x+1
Trzecie dziecko: x+2
...
Dziesiąte dziecko: x+9
2pkt

Liczba cukierków jakie otrzymały wszystkie dzieci

x + x+1 + x+2 + ... + x+9 = 10x + 1+2+ ... + 9 = 10x + 1+9 + 2+8 + 3+7 + 4+6 + 5 = 10x + 4*10 + 5 = 10x + 45
2pkt

Liczba cukierków jakie otrzymało dziecko z najmniejszą liczą cukierków

Ponieważ z treści zadania wynika, że wszystkie dzieci otrzymały 95 cukierków więc otrzymujemy równanie:
10x + 45 = 95
10x = 50
x =5
3pkt

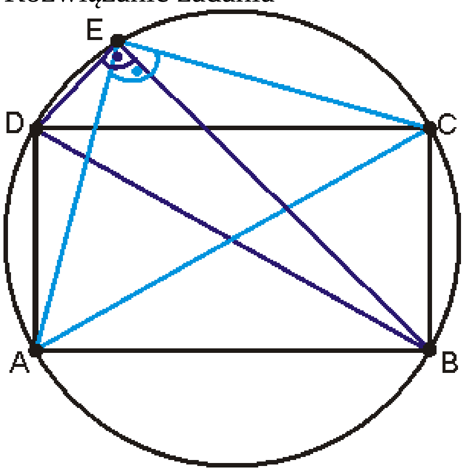
Największa liczba cukierków jakie otrzymało pojedyncze dziecko

Najwięcej cukierków otrzymało dziesiąte dziecko:
x + 9 = 5 + 9 =14 (cukierków)
2pkt
Odpowiedź: Największa liczba cukierków jakie otrzymało pojedyncze dziecko to 14. **1pkt**

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.

Zadanie 2

Rozwiązanie zadania



prawidłowy rysunek 2pkt

Trójkąty prostokątne

Przekątne prostokąta, wraz z odcinkami łączącymi punkt E z wierzchołkami prostokąta tworzą trójkaty prostokątne. Trójkąt DBE jest trójkątem prostokątnym gdyż oparty jest na średnicy (DB). Podobnie prostokątny jest trójkąt ACE.
2 pkt

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ACE

$$|AE|^2+|EC|^2=|AC|^2$$

Podstawiając |AC| = 10 (średnica okręgu) do twierdzenia Pitagorasa:

$$|AE|^2+|EC|^2=10^2$$

$$|AE|^2+|EC|^2=100$$

2pkt

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego DBE

Podobnie z trójkąta prostokątnego DBE i twierdzenia Pitagorasa otrzymamy, że:

$$|DE|^2+|EB|^2=100$$

2pkt

Szukana suma kwadratów odległości punktu E od wierzchołków prostokąta wynosi 200
($|EA|^2+|EB|^2+|EC|^2+|ED|^2=200$**)2pkt**

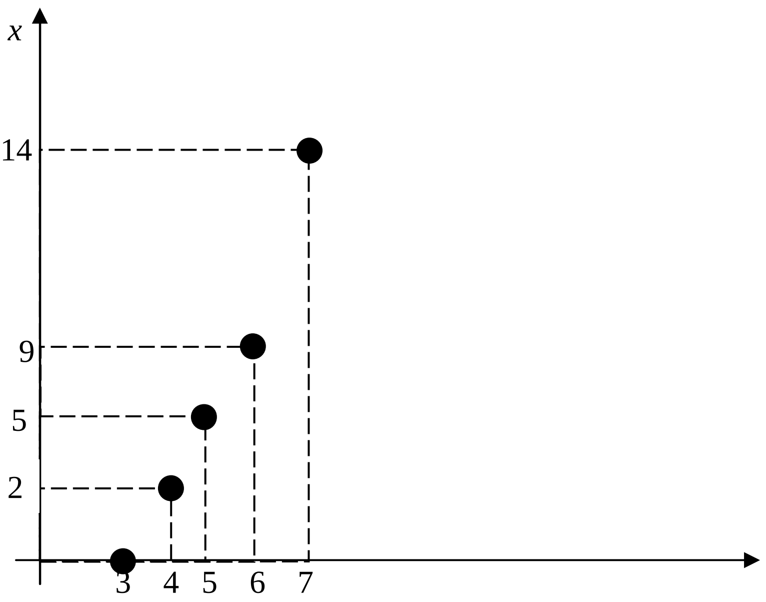
Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.

Zadanie 3

$$x = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$, gdzie *x* to ilość przekątnych w n - kącie

a) dziedziną tej funkcji są liczby naturalne większe lub równe od 3.
   Przykłady 4 różnych wartości: tak jak np. w b), **3pkt**

b) jeżeli wielokąt ma 3 boki to jest to trójkąt i nie ma przekątnych dlatego
   f(3)=0, jeżeli wielokąt ma 4 boki to wówczas f(4)=2, jeżeli wielokąt ma 5 boków, wówczas f(5)=5, i tak dalej f(6)=9, f(7)=14



2 pkt

c) $f(100) = \frac{100 \cdot (100-3)}{2} = 50 \cdot 97 = 4850$, sto-kąt ma 4850 przekątnych **2 pkt**

d) $f(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ **3 pkt**

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.

Zadanie 4

Liczby naturalne *n* możemy podzielić ze względu na podzielność przez 3 na trzy grupy:

1) dzielące się przez 3: postaci 3k, gdzie $k \in N$

2) dające resztę 1 przy dzieleniu przez 3: postaci *3k+1*, gdzie $k \in N$

3) dające resztę 2 przy dzieleniu przez 3: postaci *3k+2*, gdzie $k \in N$

Wszystkie liczby *n* niepodzielne przez 3 są postaci *3k+1* lub *3k+2*.

2pkt

Sprawdzam, czy dla liczb *n* postaci *3k+1* wyrażenie n^2+2 jest podzielne przez 3.

$(3k+1)^2+2=9k^2+6k+1+2=9k^2+6k+3=3\cdot(3k^2+2k+1)=3s$

gdzie $s=3k^2+2k+1$ i $s \in N$.

Zatem dla *n = 3k+1* wyrażenie n^2+2 jest podzielne przez 3.

3pkt

Sprawdzam, czy dla liczb *n* postaci *3k+2* wyrażenie n^2+2 jest podzielne przez 3.

$(3k+2)^2+2=9k^2+12k+4+2=9k^2+12k+6=3\cdot(3k^2+4k+2)=3p$

gdzie $p=3k^2+4k+2$ i $p \in N$.

3pkt

Zatem dla wszystkich *n* niepodzielnych przez 3 (*n = 3k+1* oraz *n = 3k+2*) wyrażenie n^2+2 jest podzielne przez 3, co należało dowieść (cnd).

2pkt

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.

Zadanie 5

x, y, z – wymiary kartonika, gdzie $x<y<z$
Obliczamy objętość na 3 sposoby:

1. $V=8xy$,
2. $V=4xz$,
3. $V=2yz$.

   3 pkt

$V^3= 64x^2y^2z^2=64(xyz)^2$, stąd:

$xyz=1000\ cm^3$, czyli

$V^3=64\bullet 1000^2$, toteż

$V=400\ cm^3$.
6pkt

Odp.: W kartoniku jest 400 cm^3 soku.
1pkt

Prawidłowo zrobione zadanie punktujemy maksymalnie (10 pkt) bez względu na metodę rozwiązania.